前期日程問題

平成２３年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3 この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6 この問題冊子は持ち帰ること．

$\boxed{\mathbf{1}}$ Oを原点とする座標平面において，2次正方行列 A の表す1次変換を f とする．点 $(1,\ 0)$ を P とし，$\mathrm{Q} = f(\mathrm{P})$，$\mathrm{R} = f(\mathrm{Q})$ とおくとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{0}$$

であるとする．

(1) $f(\mathrm{R}) = \mathrm{P}$ であることを証明せよ．

(2) $A^2 + A + E = O$ であることを証明せよ．ここで E は単位行列，O は零行列である．

(3) PQの長さが $\sqrt{5}$ であり $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が $\dfrac{3}{2}$ であるとき，行列 A をすべて求めよ．

2　1 辺の長さが 1 の立方体について，以下の問いに答えよ．

(1)　立方体を 1 枚の平面で切断したときの切り口が三角形であるとき，その三角形は鋭角三角形であることを証明せよ．

(2)　どのような鋭角三角形 T に対しても，立方体を 1 枚の平面で切断したときの切り口が T と相似になるような切り方が存在することを証明せよ．

(3)　立方体を 3 枚の平面で切断し，いくつかの立体に切り分けることを考える．このような切り方の中で，正五角形の面をもつ立体を作る方法を説明せよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ a を正の実数とする．座標平面において，曲線 $C_1 : y = \sqrt{a(x+2)}\ (x \geqq -2)$ と曲線 $C_2 : y = \sqrt{x^2+2x}\ (x \geqq 0)$ を考える．曲線 C_1 と曲線 C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を $S_1(a)$ とし，曲線 C_2 と曲線 C_2 および直線 $x = 2a$ で囲まれた部分の面積を $S_2(a)$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2a} \sqrt{a(x+2)}\,dx$ を求めよ．

(2) $f(a) = S_1(a) - S_2(a)$ とおく．関数 $f(a)$ が極値をとるような a の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2a} \sqrt{x^2+2x}\,dx > 2a^2$ であることを証明せよ．

(4) $S_1(a) = S_2(a)$ となるような a が存在することを証明せよ．

4　n を 5 以上の整数とする．平面上に点 O をとる．O を通る直線上に $\mathrm{OA}_0 = 1$ となる点 A_0 を一つとる．点 O を中心として直線 OA_0 を正の向きに角 $\dfrac{2\pi}{n}$ だけ回転した直線上に $\mathrm{OA}_1 \perp \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ となる点 A_1 をとる．次に，点 O を中心として直線 OA_1 を正の向きに角 $\dfrac{2\pi}{n}$ だけ回転した直線上に $\mathrm{OA}_2 \perp \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ となる点 A_2 をとる．以下同様にして $k = 3, 4, \ldots\ldots, n$ について，点 O を中心として直線 OA_{k-1} を正の向きに角 $\dfrac{2\pi}{n}$ だけ回転した直線上に $\mathrm{OA}_k \perp \mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k$ となる点 A_k をとる．特に，点 A_n は線分 OA_0 上の点となる．

(1)　不等式 $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqq \cos x$ を証明せよ．

(2)　線分 OA_n の長さを r_n とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．

(3)　線分 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，…，$\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ の長さの和を L_n とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L_n$ を求めよ．