前期日程問題

平成２４年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1 x を実数とし，3 辺の長さが 1，x および $2-x$ の三角形を考える．

(1) x の取り得る値の範囲を求めよ．

(2) 長さ 1 の辺と長さ x の辺のなす角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ．

(3) 三角形の面積を x を用いて表せ．

(4) 三角形を長さ x の辺のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(x)$ とおく．$V(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 平面上に原点 O を外心とする $\triangle$ABC があり

$$7\overrightarrow{\mathrm{OA}} + x\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$$

が成り立っているとする．ただし $x > 0$，$y > 0$ とする．点 A を通り直線 OA に垂直な直線を l とする．直線 l は直線 BC と交わるとし，その交点を D とする．このとき点 C は線分 BD 上にあるとする．$\angle$ADB の 2 等分線と辺 AB，辺 AC との交点をそれぞれ P，Q とする．

(1) AP $=$ AQ であることを証明せよ．

(2) $\triangle$APQ が正三角形となる整数 x，y の組をすべて求めよ．

(3) $\triangle$ABC と $\triangle$APQ の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．(2)で求めた x，y のうち，$x+y$ が最大になるものについて，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 四面体 ABCD があり，辺 AC と辺 BD は辺 AB に垂直であるとし，面 ABC と面 ABD は垂直に交わるとする．辺 AB の長さを 1 とし，辺 AC の長さを a，辺 BD の長さを b とおく．次に，点 C を通り直線 AB に垂直である平面を K とおく．四面体に内接する球の半径を r とおき，球の中心から平面 K に下ろした垂線の長さを c とおく．

(1) $\dfrac{r}{c}$ を b を用いて表せ．

(2) r を a，b を用いて表せ．

(3) $a = 1$ とする．線分 AB の中点を通り直線 AB と垂直に交わる平面を H とおく．四面体に内接する球が平面 H と共有点を持たないような b の範囲を求めよ．

4　2 以上の整数 n に対し

$$I_n = \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{1-\cos x}{x-\log(1+x)}\,dx$$

とおく．

(1)　$I_n \leqq \dfrac{2\pi}{2(n-1)\pi - \log(1+2(n-1)\pi)}$ であることを証明せよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n = 1$ であることを証明せよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ であることは証明なしに用いてよい．