前期日程問題

平成２５年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1 a，b，c を定数とし，$a \neq 0, 1$ とする．座標平面上に 2 つの放物線

$$C : y = x^2, \quad C' : y = ax^2 + bx + c$$

がある．C，C' の両方に接する直線を C，C' の共通接線という．C，C' の共通接線がちょうど 2 本存在するという条件を(T)で表す．

(1) 条件(T)が成り立つための必要十分条件は，C' が下に凸で C と C' が異なる 2 点で交わるか，または，C' が上に凸で C と C' が共有点をもたないことのいずれかが成り立つことであることを証明せよ．

(2) 条件(T)が成り立つとき，2 本の共通接線を l，m とおく．l と C，C' の接点をそれぞれ A，P とおき，m と C，C' の接点をそれぞれ B，Q とおく．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．このとき，直線 AB と PQ は平行であることを証明せよ．

(3) 条件(T)が成り立つとき，(2)で定めた 4 点 A，B，P，Q を頂点とする四角形が平行四辺形となるための放物線 C' に関する条件を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = a_2 = 1$ かつ漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすものとする．自然数 n に対して，実数 θ_n を

$$0 < \theta_n < \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \tan\theta_n = \frac{1}{a_n}$$

となるように定める．

(1) $a_n(a_{n+2} + a_{n+1}) = a_{n+1}a_{n+2} - (-1)^n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\theta_{2k+1} + \theta_{2k+2} = \theta_{2k} \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \theta_{2k-1}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 辺の長さが 1 の正四面体 T がある．T に内接する球の半径を a，T に外接する球の半径を b とする．T に内接する球の中心を O とし，O から正四面体 T の辺の中点までの距離を c とする．O を中心とする半径 r（ただし $a < r \leqq c$）の球 B_r を考える．B_r から T の内部に含まれる部分を除いてできる立体の体積を $V(r)$ とする．

⑴ a，b，c の値を求めよ．

⑵ $a < r \leqq c$ の範囲で，$\dfrac{V(r)}{r^6}$ が最大となる r を求めよ．

4 2×2 行列 A，B は

$$A^2 = B^2 = E \quad \text{かつ} \quad AB + BA = O$$

をみたしているとする．ここで E は単位行列，O は零行列である．

(1) $(A+B)^{2m}$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) 実数 a，b に対して，$aE + bAB = O$ ならば $a = b = 0$ であることを証明せよ．

次に行列 A，B のうち一方を無作為に選ぶ試行を n 回繰り返す．ただし n は 1 以上の整数とする．k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ の試行で選んだ行列を C_k と表し，積

$$X_n = C_1 C_2 \cdots C_n$$

を考える．$X_n = E$ となる確率を p_n とする．

(3) n が奇数のとき，$p_n = 0$ であることを証明せよ．

(4) n が偶数のとき，p_n を求めよ．