前期日程問題

平成２８年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3 この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6 この問題冊子は持ち帰ること．

1　n は 2 以上の整数とする．変量 x についてのデータの値を x_k $(1 \leqq k \leqq n)$ とし，変量 y についてのデータの値を y_k $(1 \leqq k \leqq n)$ とする．変量 z はデータの値が $x_k y_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ である変量を表す．

(1)　変量 x と y の n 個の値の組を $(x_k,\ y_k)$ $(1 \leqq k \leqq n)$ としたときの x と y の共分散 s_{xy}（偏差の積の平均）について

$$s_{xy} = \overline{z} - \overline{x}\,\overline{y}$$

が成り立つことを証明せよ．ここで $\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$ はそれぞれ変量 x，y，z についてのデータの値の平均値を表す．

0 以上の整数 a と 1 以上の整数 b に対し，a を b で割った余りを $R_b(a)$ と表す．l，m は 2 以上 n 以下の整数とする．変量 x と y の n 個の値の組を

$$(x_k,\ y_k) = (R_l(k-1)+1,\ R_m(k-1)+1) \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

としたときの x と y の相関係数を r とする．

(2)　l は n の約数とし，$m = n$ であるとき，r を求めよ．

(3)　$n = l(l+1)$ とし，$m = l+1$ であるとき，r を求めよ．

2 z は 0 でない複素数とし，$\alpha = \dfrac{3}{4}(z + \overline{z})$，$\beta = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}\right)$ とおく．ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数である．

(1) $\beta = 0$ となる z はどのような複素数か述べよ．

(2) α と β がともに自然数となる z をすべて求めよ．

(3) 複素数平面上において，(2)で求めた z に対応する点のすべてを周または内部に含む円を考え，そのような円のうち最小の面積をもつものを C とする．C の中心を表す複素数と C の半径を求めよ．

3　a，b を正の実数とし，媒介変数表示

$$x = a\cos 2t, \quad y = b\sin 3t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される xy 平面上の曲線を C とする．

⑴　実数 θ に対して，$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ であることを証明せよ．

⑵　y を x を用いて表せ．

⑶　x の関数 y の増減を調べ，曲線 C の概形をかけ．

⑷　曲線 C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

4 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．すべての整数 l, m に対し，直線 $x = l$ と直線 $y = m$ を引き，xy 平面を格子点を頂点とする一辺の長さが 1 の正方形の集まりに分割する．その一つ一つの正方形（格子点を頂点とする 1 辺の長さが 1 の正方形）の内部を区画と呼ぶ．正の実数 k に対して原点を通る直線 $L_l : y = kx$ をとり，L_k が通る区画について考える．ここで L_k が区画を通るとは，直線 L_k と区画が共有点をもつことをいう．自然数 n に対して，不等式 $n - 1 < x < n$ で表される xy 平面上の領域を D_n とする．D_n の含まれ，直線 L_k が通る区画の個数を a_k とおく．

以下 k は無理数とする．

(1) 直線 L_k は原点以外に格子点を通らないことを証明せよ．

(2) $k < a_n < k + 2$ であることを証明せよ．

(3) N を自然数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n$ を求めよ．

(4) $0 < k < 1$ とする．自然数 N に対し，N 以下の自然数 n で $a_n \geqq k + 1$ となる n の個数を A_N とおく．極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{A_N}{N}$ を求めよ．