

前期日程問題

平成31年度医学科入学試験問題

数 学

(注意事項)

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**
- 3 この問題冊子の本文は、4 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて監督者に知らせること。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ で定める. xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする. 0 以上の整数 k に対して, C 上の点 $(k, f(k))$ を P_k とおく. n は 1 以上の整数とする.

(1) 曲線 C の概形をかけ.

(2) 線分 $P_{k-1}P_k$ ($k \geq 1$) と曲線 C で囲まれる部分の面積を a_k とする. a_k を k を用いて表せ.

(3) (2)の a_k に対して, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく. S_n を n を用いて表せ.

(4) 点 P_0 から点 P_n までの曲線 C の長さを l_n とする. (3)の S_n に対して, $\frac{S_n}{l_n}$ の値を求めよ.

2 a は正の実数とする. 平面上に $\triangle OAB$ があり, 辺 OA の長さは a , 辺 OB の長さは 1 , \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} の内積は $\frac{1}{2}$ であるとする. さらに, 点 A を通り, 直線 OB と O で接し, 辺 AB と交わる円 C があるとする. 辺 AB と円 C の交点を D とする. ただし, D は A , B と異なる点とする. $\triangle OAD$ の内接円 C_1 の半径を r_1 とし, $\triangle OBD$ の内接円 C_2 の半径を r_2 とする.

- (1) a のとり得る値の範囲を求めよ.
- (2) 線分 OD の長さを求めよ.
- (3) r_1 および r_2 を a を用いて表せ.
- (4) $r_1 r_2$ が最大となるとき, a の値を求め, 円 C_1 と円 C_2 は接することを証明せよ.

3 複素数平面における円 $C : |z| = 1$ を考える. 複素数 z に対して, \bar{z} は z に共役な複素数を表す.

(1) 円 C 上の点 α における接線を l とする. このとき l 上の点 z は等式

$$z + \alpha^2 \bar{z} = 2\alpha$$

を満たすことを証明せよ.

次に n を 3 以上の整数とし, 円 C 上に n 個の点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ をとる. ただし, $\alpha_k^2 \neq \alpha_{k+1}^2$ ($1 \leq k \leq n-1$) かつ $\alpha_n^2 \neq \alpha_1^2$ とする. 点 α_k における円 C の接線を l_k ($1 \leq k \leq n$) とする. l_k と l_{k+1} の交点を z_k ($1 \leq k \leq n-1$) とし, l_n と l_1 の交点を z_n とする.

(2) このとき

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k$$

であることを証明せよ.

(3) $\alpha = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}$ とする. ここで i は虚数単位を表す.

$$\alpha_k = \cos \frac{k\pi}{2n} + i \sin \frac{k\pi}{2n} \quad (1 \leq k \leq n)$$

としたときの z_k について

$$(\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}$$

の値を求めよ.

4 n は 2 以上の整数とし, 正 $2n$ 角形 K_n を考える. K_n の $2n$ 個の頂点から異なる 3 個の頂点を無作為に選び, それらを頂点とする三角形 T をつくる. T が直角三角形になる確率を p_n とし, T が鋭角三角形になる確率を q_n とする.

- (1) p_3 と q_3 を求めよ.
- (2) p_n を n を用いて表せ.
- (3) q_n を n を用いて表せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ.