

前期日程問題

令和2年度医学科入学試験問題

数 学

(注意事項)

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**
- 3 この問題冊子の本文は、4 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて監督者に知らせること。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 xy 平面において曲線 $C: y = 2 - \frac{x^2}{2}$ を考える. $t > 0$ とし C 上の点 $P\left(t, 2 - \frac{t^2}{2}\right)$ における C の法線を l とする. l と C とで囲まれる図形を K とする.

- (1) 法線 l の方程式を t を用いて表せ.
- (2) $t > 0$ における K の面積 S の最小値を求めよ.
- (3) l が原点 O を通るとき, K を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

2 n は自然数とする. 変量 x についての $2n$ 個のデータの値を x_i ($1 \leq i \leq 2n$) とし, 変量 y についての $2n$ 個のデータの値を y_i ($1 \leq i \leq 2n$) とする. k は $1 \leq k \leq 2n - 1$ を満たす整数とする. 変量 x と y の $2n$ 個の値の組を

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (i, i + 2n - k) & (1 \leq i \leq k) \\ (i, i - k) & (k + 1 \leq i \leq 2n) \end{cases}$$

で与える. x と y の共分散を s_{xy} とし, x と y の相関係数を r とする.

- (1) s_{xy} を k と n を用いて表せ.
- (2) $r = 0$ となる k は存在しないことを証明せよ.
- (3) 自然数 n に対して r を最小にする k をとり, そのときの r を r_n と表す. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ を求めよ.

3 複素数 z の虚部を $\text{Im}(z)$, 偏角を $\arg z$ と表す. ただし, $0 \leq \arg z < 2\pi$ とする. また z に共役な複素数を \bar{z} と表す.

α, β は互いに異なる 0 でない複素数とする. $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ (i は虚数単位) とし, $g_1 = \alpha + \omega\beta$, $g_2 = \alpha + \omega^2\beta$ とおく. 複素数平面上で α, β が表す点をそれぞれ A, B とする. また原点を O とする.

- (1) 複素数 z に対して, $\text{Im}(z) = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$ であることを証明せよ.
- (2) $\text{Im}(\alpha\bar{\beta}) = \frac{\sqrt{3}}{6}(|g_1|^2 - |g_2|^2)$ であることを証明せよ.
- (3) 3 点 O, A, B が同一直線上にあるための必要十分条件は $|g_1| = |g_2|$ であることを証明せよ.
- (4) 3 点 O, A, B が同一直線上にあるとする. このとき, 点 A が線分 OB を内分する点であるための必要十分条件は $\frac{2\pi}{3} < \arg \frac{g_1}{g_2} < \frac{4\pi}{3}$ であることを証明せよ.

4 実数全体で定義された関数 $f(x)$ は微分可能で $f(0) = 0$ を満たし、その導関数 $f'(x)$ は連続かつ単調に減少しているとする。

(1) n を自然数とし、 k は $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ のとき、以下の不等式(a), (b) が成り立つことを証明せよ。

$$(a) \quad f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) \leq f(x)$$

$$(b) \quad f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right)$$

(2) $a_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = -\frac{1}{2}f(1)$$

であることを証明せよ。