

前期日程問題

令和3年度医学科入学試験問題

数 学

(注意事項)

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**
- 3 この問題冊子の本文は、4 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて監督者に知らせること。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 関数 $f(x) = x|x^2 - 1|$ を考える. r は正の実数であるとして, 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t) dt$$

と定める.

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
- (2) $r \geq 1$ のとき, $g(x)$ は単調に増加する関数であることを証明せよ.
- (3) $g(x)$ が単調に増加する関数であるような r の範囲を求めよ.

2 自然数 m に対し, m を 6 で割った余りを $r(m)$ と表す. k, l は自然数とし, xy 平面上の点

$$(r(k), r(l)), (r(2k), r(2l)), \dots, (r(6k), r(6l))$$

を要素とする集合を $A(k, l)$ とする. $A(k, l)$ の要素の個数を $n(A(k, l))$ と表す. 例えば, $k = 6, l = 6$ の場合, $(r(6m), r(6m)) = (0, 0) (1 \leq m \leq 6)$ なので, $n(A(6, 6)) = 1$ である.

(1) 大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げ, 大のさいころの出た目を $k (1 \leq k \leq 6)$, 小のさいころの出た目を $l (1 \leq l \leq 6)$ とするとき, $n(A(k, l)) \leq 3$ となる確率を求めよ.

(2) 大小 2 つのさいころを投げて, 大のさいころの出た目を k_1 , 小のさいころの出た目を l_1 とする.

さらにもう一度大小 2 つのさいころを投げて, 大のさいころの出た目を k_2 , 小のさいころの出た目を l_2 とする. $B = A(k_1, l_1) \cup A(k_2, l_2)$ とするとき, B の要素の個数が 7 になる確率を求めよ.

3 a は $a > 1$ を満たす実数とする. 1 辺の長さ a の正方形である面を 1 つ, 3 辺の長さが $a, 1, 1$ の二等辺三角形である面を 2 つ, 4 辺の長さが $a, 1, 1, 1$ の台形である面を 2 つ用意し, これらを組み合わせて 5 つの面で囲まれた立体 F ができたとする.

(1) 立体 F において, 正方形の面に平行な長さ 1 の辺がある. その辺上の点から正方形の面に引いた垂線の長さ h を a を用いて表せ.

(2) 立体 F において, 正方形の面と台形の面のなす角を θ_1 とし, 正方形の面と二等辺三角形の面のなす角を θ_2 とするとき,

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

となる a の値を求めよ.

(3) (2)で求めた a の場合を考える. 1 辺の長さが a の立方体にいくつかの F を正方形の面でうまくはり合わせると正十二面体ができる. この事実を利用して 1 辺の長さが 1 の正十二面体の体積を求めよ.

4 以下の問題 A, B のうち 1 題を選択し, 解答用紙の選択欄に A または B を記入したうえで解答すること.

A. 複素数 z に関する以下の条件(C), (D)を考える.

条件(C) $z^2 + mz + n = 0$ を満たす整数 m, n が存在する.

条件(D) $z^3 + pz + q = 0$ を満たす整数 p, q が存在する.

- (1) 複素数 z が条件(C)を満たすならば, 条件(D)も満たすことを証明せよ.
- (2) $\sqrt[3]{2}$ は条件(D)を満たすが, 条件(C)は満たさないことを証明せよ. ただし, $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることは用いてよい.
- (3) $|z| = 1$ である複素数 z で条件(D)を満たすものをすべて求めよ.

B. 平面上で 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の頂点 A, B, C を中心とする半径 1 の円で囲まれた部分をそれぞれ D_1, D_2, D_3 とする. D_1, D_2, D_3 の共通部分を K とする. すなわち K は, 共通部分に含まれる弧 AB, 弧 BC, 弧 CA で囲まれた図形である.

xy 平面上に K を考え, 点 A は原点に, 点 C は y 軸上に, 点 B は第 1 象限に属するように K をおく. この K が x 軸の上で正の方向にすべることなく転がり, 1 回転するときに見える点 A の描く曲線を L とする.

- (1) K の弧 AB と x 軸が共有点をもつとき, その共有点を P とし, $\angle ACP = \theta$ とおく. ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする. このとき点 A の座標を θ を用いて表せ.
- (2) K が 1 回転したあとの点 A の座標を求めよ.
- (3) 曲線 L と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.