前期日程問題

令和４年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1　t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする．平面上の $\triangle$ABC に対して，辺 BC，CA，AB をそれぞれ $t : (1-t)$ に内分する点を D，E，F とする．

(1)　$\triangle$ABC の重心と $\triangle$DEF の重心は一致することを証明せよ．

(2)　$\triangle$ABC の面積を S とし，$\triangle$DEF の面積を T とする．$\dfrac{T}{S}$ を t を用いて表し，$\dfrac{T}{S}$ の最小値を求めよ．

(3)　AB $= 3$，BC $= 5$，CA $= 4$ とする．$\triangle$DEF が直角三角形になるような t の値をすべて求めよ．

2 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ の増減，極値，凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(2) $(m,\ n)$ を $m + n = 10$ かつ $m \leqq n$ を満たす整数の組とする．このような組 $(m,\ n)$ に対して $f(m) + f(n)$ を考えるとき，$f(m) + f(n)$ の値が最大となる組 $(m,\ n)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\dfrac{5}{2} < e < 3$ であることは用いてよい.

3 n，m は自然数とする．赤玉と白玉が入った n 個の箱があり，次の条件(a)，(b)，(c)を満たすとする．

(a) それぞれの箱には赤玉と白玉が合計 n 個入っている．

(b) 赤玉はどの箱にも 1 個以上入っている．一方，白玉が入っていない箱はあってもよい．

(c) それぞれの箱に入っている赤玉の個数は互いに異なる．

以下の試行 T を行う．

T： 太郎さんは n 個の箱からひとつの箱を無作為に選び花子さんに渡す．花子さんは渡された箱の中から「無作為に玉をひとつ取り出し，色を確認し同じ箱に戻す作業」を $m+2$ 回繰り返す．

(1) 試行 T において，1 回目から m 回目までに取り出した玉がすべて赤玉である事象を X とし，その確率を p_n とする．このとき $\lim_{n\to\infty} p_n$ を m を用いて表せ．

(2) 試行 T において，$m+1$ 回目と $m+2$ 回目に取り出した玉のうち，少なくとも 1 個が赤玉である事象を Y とする．(1)の事象 X が起こったときの事象 Y の起こる条件付き確率 $P_X(Y)$ を q_n とする．このとき $\lim_{n\to\infty} q_n$ を m を用いて表せ．

4 n は 3 以上の整数とする．正 n 角形の外接円の半径を正 n 角形の半径とよぶ．

$2n+2$ 個の面で囲まれた凸多面体で，次の 2 つの条件(a)，(b)を満たすものを A_n とする．

(a) 2 個の半径 1 の正 n 角形を面にもち，それらは平行である．

(b) (a)の 2 個の面の他に互いに合同な $2n$ 個の正三角形を面にもつ．

例えば，A_3 は正八面体になる．$\theta = \dfrac{\pi}{n}$ とおく．

(1) A_n の辺の数を n を用いて表せ．

(2) 条件(b)の正三角形の高さを θ を用いて表せ．

条件(a)の 2 つの面の間の距離（一方の面から他方の面へ引いた垂線の長さ）を H とする．

(3) H を θ を用いて表せ．

(4) A_n の体積を V とするとき，$\dfrac{V}{nH}$ を θ を用いて表せ．