前期日程問題

令和５年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1　次の条件を(a)，(b)を満たす凸多面体を考える．

(a) 面は正三角形または正方形である．

(b) 合同な 2 つの面は辺を共有しない．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　一つの頂点を共有する面の数は 4 であることを証明せよ．

(2)　正三角形と正方形の面の数をそれぞれ求めよ．

(3)　正八面体を平面で何回か切断することで条件(a)，(b)を満たす凸多面体が得られる．どのように切断するのか説明せよ．

(4)　(3)の切断で得られる凸多面体を F とし，F の 1 辺の長さは 1 とする．F のすべての正三角形の面に接する球を B とする．B と F の共通部分の体積を求めよ．

2 関数 $f(t)$，$g(t)$ は微分可能でその導関数は連続であり，導関数 $f'(t)$，$g'(t)$ の値は同時に 0 になることはないとする．

xy 平面上で媒介変数 t を用いて $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線 C を考える．C 上に点 $\mathrm{P}(f(t_0),\ g(t_0))$ をとる．ただし $t \neq t_0$ ならば $(f(t),\ g(t)) \neq (f(t_0),\ g(t_0))$ を満たすとする．P を通る直線 l を考える．C 上に P と異なる点 $\mathrm{Q}(f(t),\ g(t))$ をとり，Q から l に垂線をおろし，l との交点を H とする．ただし，Q が l 上にあるときは $\mathrm{H}=\mathrm{Q}$ とする．

(1) $\overrightarrow{n}$ は大きさ 1 の l に垂直なベクトルとする．

$$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}| = |\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$$

であることを証明せよ．

(2) l が P における C の接線であるための必要十分条件は，$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=0$ であることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ z は 0 でない複素数とする．0 以上の整数 n に対して，$a_n = z^n + \bar{z}^n$ とおく．ここで $\bar{z}$ は z と共役な複素数である．

(1) a_n は実数であることを証明せよ．

(2) $z = 1 + i$ とする．ただし i は虚数単位である．0 以上の整数 k に対して，a_{4k}，a_{4k+1}，a_{4k+2}，a_{4k+3} を求めよ．

(3) 次の条件を満たす z をすべて求めよ．

条件：0 以上のすべての整数 k に対して $a_{6k} = a_{6k+2}$ である．

4 a，b は $0 < b < 1 < a$ を満たす実数とする．xy 平面上で方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

で表される楕円を C とする．C と同じ焦点をもち，点 $(b,\ 0)$ を通る双曲線を D とする．C と D の共有点のうち第 1 象限にあるものを P とし，その x 座標を s とする．C で囲まれる部分と領域 $0 \leqq x \leqq s$ との共通部分を K とし，直線 $x = s$ と D で囲まれる部分を L とする．K と L を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_K，V_L とする．

(1) s を a，b を用いて表せ．

(2) 点 P における C の接線と D の接線は垂直であることを証明せよ．

(3) V_K を a，b を用いて表せ．

(4) $s = 1$ であるとき，極限 $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{V_L}{V_K}$ を求めよ．