前期日程問題

令和６年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3 この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6 この問題冊子は持ち帰ること．

1 x は $x \neq 0,\ \pm 1$ である実数とし，$f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ とおく．c は実数とし，x の方程式

$$(E) \qquad x + f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) = c$$

を考える．

(1) $f(f(f(f(x)))) = x$ であることを証明せよ．

(2) $x = \alpha$ が方程式 (E) の実数解であるとき

$$f(\alpha), \quad f(f(\alpha)), \quad f(f(f(\alpha)))$$

も (E) の実数解であることを証明せよ．

(3) (E) の実数解 $x = \alpha$ に対して

$$y_1 = \alpha + f(f(\alpha)), \quad y_2 = f(\alpha) + f(f(f(\alpha)))$$

とおく．y_1，y_2 が y の 2 次方程式 $y^2 - cy - 4 = 0$ の解であることを証明せよ．

(4) $c = 3$ のとき方程式 (E) を解け．

$\boxed{2}$ 以下のような硬貨投げを行う．

1 枚の硬貨を投げて裏が出たら硬貨投げを終了し，表が出たら 1 枚の硬貨を加え 2 枚の硬貨を同時に投げる．2 枚の硬貨のうち 1 枚でも裏が出たら硬貨投げを終了し，全部が表ならば 1 枚の硬貨を加え 3 枚の硬貨を同時に投げる．3 枚のうち 1 枚でも裏が出たら硬貨投げを終了し，全部が表ならば 1 枚の硬貨を加え 4 枚の硬貨を同時に投げる．以下同様にして全部が表ならば 1 枚の硬貨を加えて硬貨投げを続ける．

1 枚の硬貨から始めて，硬貨が n 枚のときに硬貨投げが終了する確率を p_n $(n \geqq 1)$ とする．

(1) p_n を n を用いて表せ．

(2) 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ を求めよ．

(3) $P = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}$ とおく．$0.6 < P < 0.62$ であることを証明せよ．ここで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}$ が収束することは用いてよい．

$\boxed{\mathbf{3}}$　半径 1 の円に内接する五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ を考える．線分 A_1A_4 と A_2A_5 の交点を B とし，$\triangle A_1A_2B$ は正三角形であるとする．また，$A_3A_2 = A_3A_4$ とする．$a = A_1A_2$，$b = A_4A_5$ とおく．

(1)　線分 A_3B の長さを求めよ．

(2)　b を a を用いて表せ．

(3)　五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積 S を a を用いて表し，S の最大値を求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ xyz 空間の点 $\mathrm{A}(-2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ -2\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{C}(-1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{D}\left(-1,\ \sqrt{3},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を頂点とする四面体 ABCD を K とする．実数 t に対して，方程式 $x = t$ で表される平面を H とする．

(1) $-2 \leqq t \leqq 2$ のとき，平面 H と K の辺 AB との共有点を P とする．P の座標を t を用いて表せ．

(2) $-2 \leqq t \leqq -1$ のとき，平面 H と K の辺 AC，AD との共有点をそれぞれ Q，R とする．Q，R の座標を t を用いて表せ．

(3) $-1 \leqq t \leqq 2$ のとき，平面 H と K の辺 AC，AD との共有点をそれぞれ Q′，R′ とする．Q′，R′ の座標を t を用いて表せ．

(4) K を x 軸のまわりに 1 回転させるとき，K が通過する部分がつくる立体の体積 V を求めよ．